

Tracciamento di una brachistocrona

1 Traiettorie di tempo minimo (*brachistocrone*)

Per la pianificazione di un volo è opportuno determinare la traiettoria tra il punto di partenza A e il punto di destinazione B che richiede il minimo tempo di volo in quanto tale traiettoria permetterà di conseguire un notevole risparmio sia in termini di consumo di carburante, sia in termini di costi per le revisioni periodiche.

In assenza di vento la traiettoria di tempo minimo è rappresentata dall'arco di circonferenza massima (*ortodromia*) passante per i punti A e B ; in presenza di vento già la rotta a deriva unica permette di ottenere un risparmio di tempo in quanto lungo tale traiettoria si incontrano venti più favorevoli (o meno sfavorevoli) e viene ottenuta di conseguenza una maggiore velocità al suolo.

Nel 1949 i meteorologi francesi, J. Bessemoulin e R. Pône, presentarono un metodo pratico per tracciare rotte di tempo minimo indicando tali traiettorie con il termine *brachistocrona*, dal greco *bráchistos* (il più breve) e *chrónos* (tempo).

Sia A la posizione di un aeromobile all'istante t in volo con TAS costante; dopo un intervallo di tempo Δt , in assenza di vento, l'aeromobile si troverà su uno dei punti della circonferenza avente centro A e raggio m uguale al prodotto della TAS per l'intervallo di tempo Δt : tale curva è definita *isocrona-aria* per l'istante $t + \Delta t$ (curva a tratti della fig. 1).

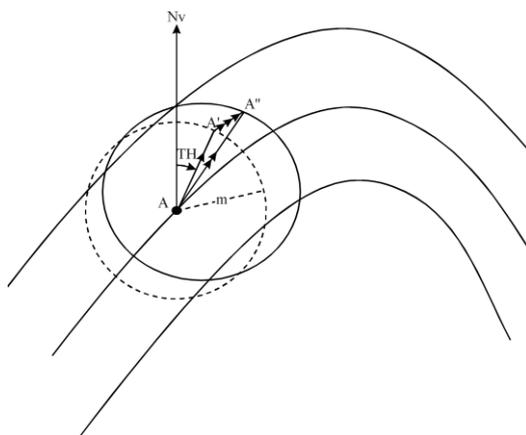


Figura 1 – Tracciamento per punti di una isocrona suolo

In presenza di vento (variabile o costante) si può costruire una seconda curva che indica le possibili posizioni in cui si può trovare l'aeromobile al tempo $t + \Delta t$, facendo uscire da ciascun punto dell'isocrona-aria (per esempio A') il vettore vento definito in quel punto e il cui modulo è determinato dal prodotto della velocità WV del vento per l'intervallo Δt . Tale curva è detta *isocrona-suolo* per l'istante $t + \Delta t$ (curva intera della fig. 1).

Quindi un aeromobile, partendo da A con una data TH , dopo un intervallo di tempo Δt si troverà in A' (in assenza di vento) o in A'' (in presenza di vento).

Scegliendo una serie di punti nell'intorno di A'' (per esempio P, Q, \dots), con centro in ciascuno di essi e raggio uguale a $TAS \times \Delta t$, si tracciano delle semicirconferenze il cui involuppo rappresenterà l'isocrona-aria per l'istante $t + 2\Delta t$ (fig. 2).

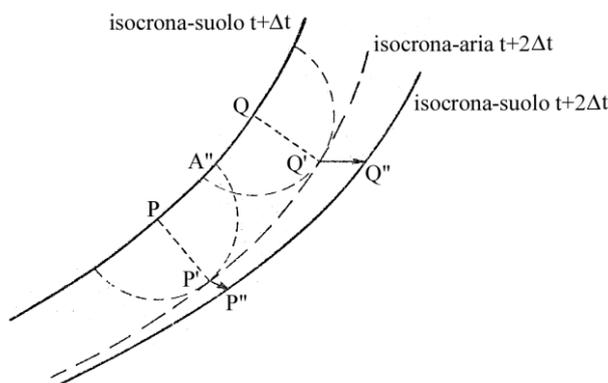


Figura 2 – Tracciamento delle successive isocrone-suolo

Essa determina il luogo delle possibili posizioni dell'aeromobile se, partendo dai punti della precedente isocrona-suolo, si sceglie una prora perpendicolare ad essa.

Se da ciascun punto di tale isocrona-aria si porta il vettore vento di modulo $WV \times \Delta t$ (in figura $P'P''$, $Q'Q''$, ...) si ottiene una nuova curva che definisce l'*isocrona-suolo* per l'istante $t + 2\Delta t$. Essa rappresenta il luogo dei punti di massimo allontanamento dall'isocrona-suolo precedente.

In maniera analoga si possono costruire le isocrone-aria e le isocrone-suolo per gli istanti $t + 3\Delta t, t + 4\Delta t, \dots$ fino a raggiungere il punto di destinazione B (fig. 3).

L'isocrona-suolo passante per B determina il tempo di volo minimo T in quanto tale curva rappresenta il luogo dei punti più distanti da A che è possibile raggiungere nell'intervallo T (nel caso della figura in un tempo $5\Delta t$).

Resta ora da determinare la traiettoria (*brachistocrona*) tale da permettere all'aeromobile di raggiungere il punto di destinazione B in questo tempo minimo T .

Dal punto di partenza sarebbe possibile, per ogni TH iniziale assegnata, costruire un fascio di brachistocrone di cui una soltanto passerà per B (fig. 3).

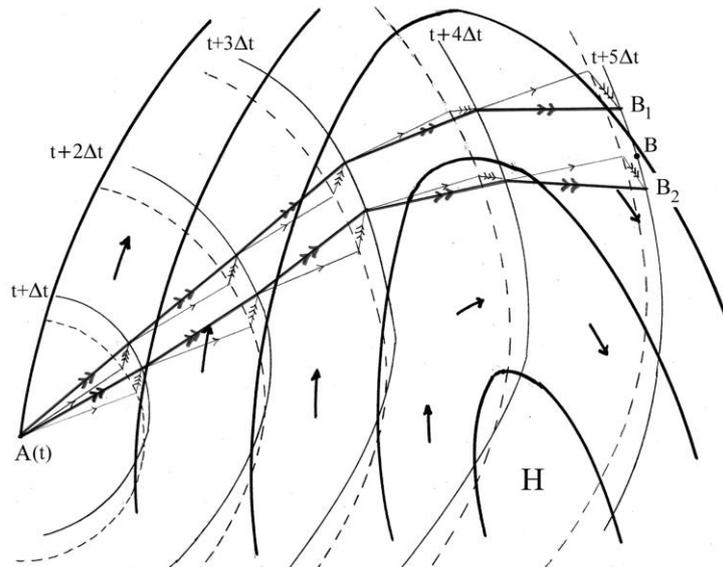


Figura 3 – Tracciamento di una famiglia di brachistocrone

È tuttavia più sbrigativo, partendo a ritroso dal punto di destinazione B , ricavare la brachistocrona AB . Infatti, a partire da B (fig. 4), si costruisce un vettore uguale e contrario al vettore vento (di modulo $WV \times \Delta t$) ottenendo il punto B' ; da tale punto si conduce la perpendicolare all'isocrona-aria (essa risulta anche perpendicolare all'isocrona-suolo precedente in quanto tra loro parallele): il segmento MB è il tratto finale di brachistocrona cercata.

A partire da M si porta ancora un vettore uguale e contrario al nuovo vento (sempre di modulo $WV \times \Delta t$) ottenendo il punto M' ; da tale punto si conduce la perpendicolare all'isocrona-suolo fino ad ottenere il punto N : il segmento MN è il nuovo tratto di brachistocrona.

Procedendo in modo analogo si perviene nel punto P ; da P portando il vettore uguale e contrario al vettore vento si ottiene P' ; AP è l'ultimo tratto di brachistocrona cercata mentre la direzione AP' rappresenta la TH iniziale.

La figura 4 mostra il tracciamento di una brachistocrona ipotizzando, sull'area interessata al volo, una particolare distribuzione di venti.

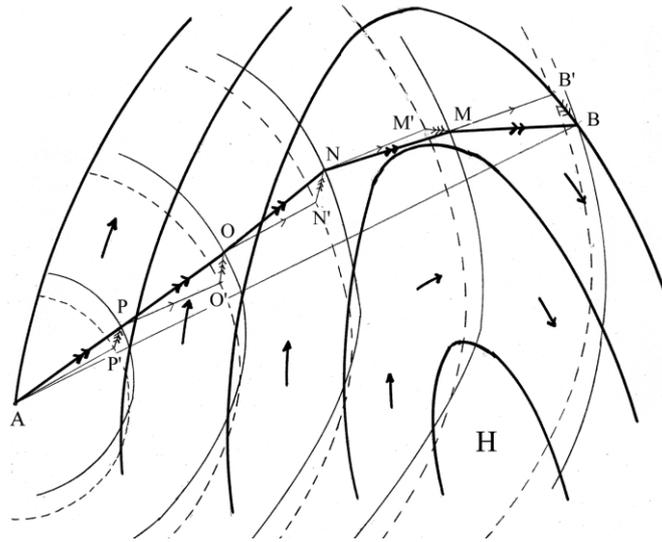


Figura 4 – Tracciamento della brachistocrona tra A e B